Application du PFD

Mouvement de chute libre

Système ? Référentiel ? Bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (axe $\vec{u}_z$ vertical ascendant)

PFD $\rightarrow m\vec{a} = \vec{P}$; On projette la relation sur les axes :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \\ \dot{z} = -gt + \dot{z}_0 \end{cases} \quad \text{On détermine } \dot{x}_0, \dot{y}_0 \text{ et } \dot{z}_0 \text{ grâce aux conditions initiales.}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{cases} \quad \text{On détermine } x_0, y_0 \text{ et } z_0 \text{ grâce aux conditions initiales}$$

$\rightarrow$ Equation horaire (selon z) : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$

Prise en compte des frottements (à rajouter dans le PFD)

$\rightarrow$ On obtient une équation différentielle :

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda v \Leftrightarrow m\ddot{z} = -mg - \lambda\dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} = -g$$

Pour résoudre : 2 étapes :

* On pose $\dot{z} = A$ cst $\rightarrow \ddot{z} = 0$

$$\rightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} = -g \rightarrow 0 + \frac{\lambda}{m}A = -g \rightarrow A = -\frac{mg}{\lambda}$$

$$\rightarrow \dot{z}_1 = \frac{-mg}{\lambda} \text{ (Solution particulière)}$$

* Equation différentielle de la forme $\dot{y} + \frac{y}{\tau} = 0 \rightarrow$ Solution : $y = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{m} = \frac{1}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{m}{\lambda}$$

$$\rightarrow \dot{z}_2 = A \exp\left(\frac{-\lambda t}{m}\right) \text{ (Solution générale)}$$

$$\text{Solution de l'équation : } \dot{z} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \frac{-mg}{\lambda} + A \exp\left(\frac{-\lambda t}{m}\right)$$

On détermine A à partir des conditions initiales : à $t = 0$: $z = 0$

$$\rightarrow A = \frac{mg}{\lambda}$$

$$\text{D'où : } \dot{z}(t) = \frac{-mg}{\lambda} \left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda t}{m}\right)\right)$$

On détermine l'équation du mouvement en intégrant l'expression.

Systeme avec force de rappel linéaire